

DECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS. Fábio Feliciano de Oliveira, Marco Antônio Piteri. - Exatas - Ciência da Computação - Departamento de Matemática, Estatística e Computação - Faculdade de Ciências e Tecnologia - Campus de Presidente Prudente.

A *Decomposição de Polígonos* é um problema clássico na área de Geometria Computacional e muitas vezes também é referenciado na literatura como *Partição de Polígonos*. Uma das razões que motiva este estudo é a dificuldade, independente da área de aplicação, associada à manipulação de polígonos arbitrários sob uma perspectiva computacional, ou seja, elaborar procedimentos algorítmicos genéricos capazes de trabalhar com quaisquer classes de polígonos. Nesse sentido, a decomposição de polígonos em regiões elementares, facilita enormemente as possíveis abordagens computacionais.

Para ser mais preciso, possibilitar uma visão mais abrangente do problema que estamos abordando neste trabalho e qual o estágio de desenvolvimento que nos encontramos, abaixo é feito uma enumeração com os tipos mais comuns de decomposição de polígonos.

- regiões convexas arbitrárias (qualquer número de lados);
- regiões trapezoidais;
- componentes monótonas;
- regiões triangulares.

A decomposição de um polígono em regiões triangulares é conhecida popularmente por triangulação de polígonos e é indiscutivelmente o tipo de partição mais importante, em grande parte devido à amplitude de suas aplicações, como por exemplo: localização de pontos em subdivisões planares (GIS) e renderização de superfícies complexas. Este problema possui ainda inter-relacionamentos com as áreas de Teoria dos Grafos e Robótica. De uma perspectiva mais formal, a triangulação de polígonos implica em discretizá-lo, de modo que todas as regiões resultantes possuam exatamente três lados e seus os vértices pertençam ao polígono original, ou seja, na abordagem que iremos desenvolver só é permitida a inserção de *diagonais interiores*.

No contexto deste trabalho estamos interessados somente em *polígonos simples*, que são aqueles que não possuem auto-intersecção. Concretamente, iremos apresentar os resultados relativos às implementações realizadas de dois algoritmos. O primeiro deles é para obter uma triangulação de polígonos simples arbitrários a partir da técnica *Corta-Orelhas* (ear-cutting), enquanto o segundo está associado à decomposição de polígonos em componentes *y-monótonas*. Uma conceituação mais formal sobre esta importante subclasse de polígonos é dada a seguir.

Uma seqüência de vértices (pontos) $C = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ e arestas (segmentos) $\{(v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq p-1\}$ é uma *cadeia monótona* com relação a uma linha l , se qualquer linha ortogonal a l , intercepta C exatamente num ponto. Em outras palavras, se as projeções ortogonais $\{(l(v_1)), (l(v_2)), (l(v_3)), \dots, (l(v_p))\}$ da seqüência de vértices C sobre l , estão exatamente na mesma ordem em que ocorrem em C . A Figura 1b ilustra um exemplo de seqüência que satisfaz esta propriedade.

Por outro lado, um polígono simples P é monótono com relação a uma reta l , se a sua fronteira puder ser descrita pela união de duas *cadeias monótonas*.

A subclasse de *polígonos monótonos* tem sido extremamente importante para a resolução de inúmeros problemas na área de Geometria Computacional, incluindo a triangulação.

Embora estamos focando o *problema de decomposição de polígonos* de um ponto de vista algorítmico, devemos estar atentos que há vários resultados matemáticos interessantes, principalmente alguns de natureza combinatória. É facilmente perceptível que triangulação de um polígono induz no plano uma subdivisão deste espaço que esta obedece a Relação de Euler dada por $V + F - E = 2$, onde: V , F e E são, respectivamente, o número de vértices, faces (incluindo a exterior) e arestas da triangulação.

Um par de *arestas* consecutivas de P dadas pelos pares de *vértices* (v_i, v_j) e (v_j, v_k) é denominado uma *orelha* do polígono, se o segmento que une os *vértices* (v_i, v_k) está no interior de P e não intercepta nenhuma das outras *arestas* de P . Esta definição está na base da técnica de triangulação referenciada na literatura por *Corta-Orelhas*.

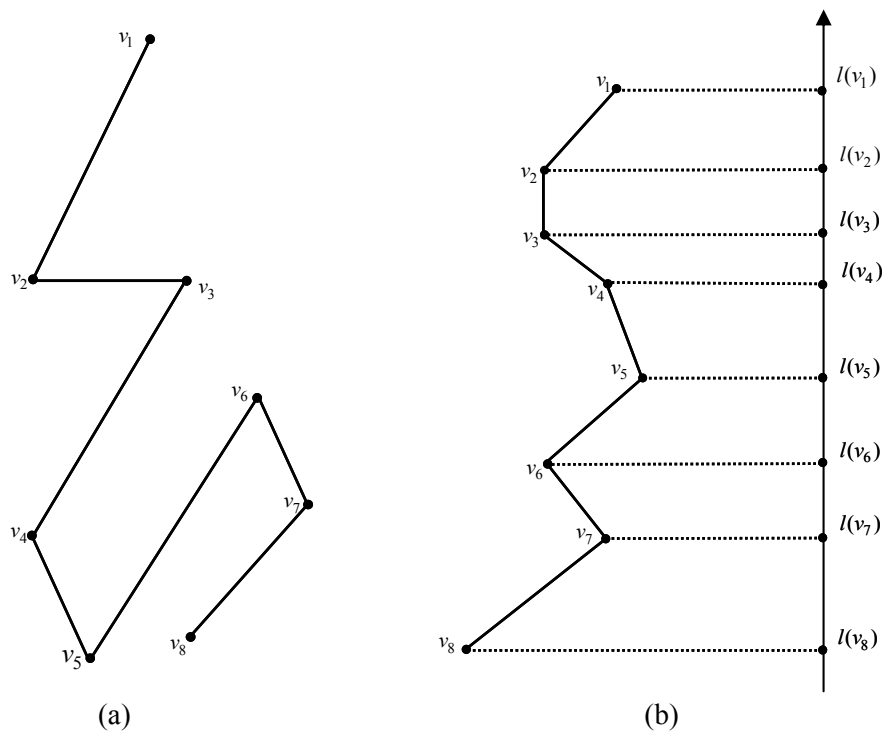


Figura 1: (a) Exemplo de uma cadeia não monótona em relação a qualquer linha l ; (b) Sequência de vértices da cadeia e respectiva projeção destes vértices sobre a linha l paralela ao *eixo-y*, onde observamos que a mesma é monótona.

Outro resultado combinatório interessante é dado pelo Teorema 1. A prova pode ser feita por indução sobre o número n e pode ser encontrada facilmente na literatura.

Teorema 1: Todo polígono simples P com n vértices admite uma triangulação com exatamente $n-2$ triângulos e a inserção de $n-3$ diagonais interiores.

O Algoritmo 1 ilustra em linhas gerais os passos necessários relativos à técnica de triangulação *Corta-Orelhas*, enquanto as Figuras 2 e 3 ilustram exemplos de polígonos simples arbitrários que foram decompostos em regiões triangulares a partir da implementação desenvolvida.

Entrada: Um polígono simples P arbitrário.

Saída: Polígono P com seu interior decomposto em regiões triangulares.

Passo1: Verificar se P já está triangularizado;

Passo 1.1: Se estiver pare, não há nada a fazer;

Passo 1.2: Se não estiver, vá para o **Passo 2**.

Passo 2: Selecione um par qualquer de arestas consecutivas e_i e e_j ;

Passo 3: Enquanto uma diagonal não for inserida faça

Passo 3.1: Verificar se as arestas e_i e e_j formam uma orelha;

Passo 3.1.1: Se formam, insira uma diagonal entre os vértices adjacentes ao vértice comum às duas arestas e vá para o **Passo 4**.

Passo 3.1.2: Se não formam, selecione o próximo par de arestas a e_i , que é formado por e_j e e_{j+1} e, volte ao **Passo 3.1**.

Passo 4: Repita o processo recursivamente para a face que ainda não está triangularizada.

Algoritmo 1:Pseudocódigo associado à técnica de triangulação *Corta-Orelhas*.

Embora a representação interna de um polígono simples arbitrário e sua completa decomposição possam ser feitas por estruturas de dados do tipo *lista encadeada simples*, optamos por usar uma estrutura de dados topológica que permite obter do modelo representado todas as relações de adjacência e conectividade existentes entre as entidades *vértices*, *arestas* e *faces* em tempo constante e de forma completamente independente da dimensão do problema. Estas operações de natureza topológicas são fundamentais para garantir a consistência e a robustez das implementações que estamos desenvolvendo, já que ao trabalhar sobre a topologia do objeto, conseguimos eliminar muitas operações de natureza geométrica, que são as grandes responsáveis por problemas de erros numéricos decorrentes da aritmética de ponto flutuante.

Além disso, a estrutura que estamos usando, que é a *winged-edge modificada*, representa também poliedros arbitrários, o que abre a possibilidade no futuro de aproveitar grande parte do código já elaborado para estudar o mesmo problema no espaço euclidiano de dimensão 3, que é igualmente importante e muito mais complexo do ponto de vista computacional.

Todos os aspectos relacionados à visualização das diferentes etapas do processo de decomposição estão sendo tratados por meio da ferramenta gráfica **OpenGL**, enquanto a interface está sendo desenvolvida nesta fase através do uso da biblioteca **GLUI** (**G**raphical **L**ibrary **U**ser **I**nterface). Um protótipo com estas características e com os dois algoritmos citados já se encontra em pleno funcionamento.

Vale salientar que o problema de triangulação não possui unicidade. Em outras palavras, para um mesmo polígono é possível obter diferentes triangulações. Nesse sentido, algumas restrições podem ser adicionadas em relação ao tipo de triangulação que se deseja obter. Por exemplo, dentre todas existentes qual é aquela que minimiza o comprimento das arestas, ou ainda, qual é aquela que maximiza o menor ângulo entre todas as possíveis triangulações. Observem ainda que na abordagem apresentada não é permitida a inserção de pontos interiores, que são denominados *pontos de Steiner*. Estas variantes do problema são de extrema complexidade e serão objetos de estudo no futuro no contexto de um *Projeto Final de Graduação* a ser apresentado no final de 2007, cuja temática principal é estudar o problema de *Decomposição de Polígonos* em suas diferentes vertentes.

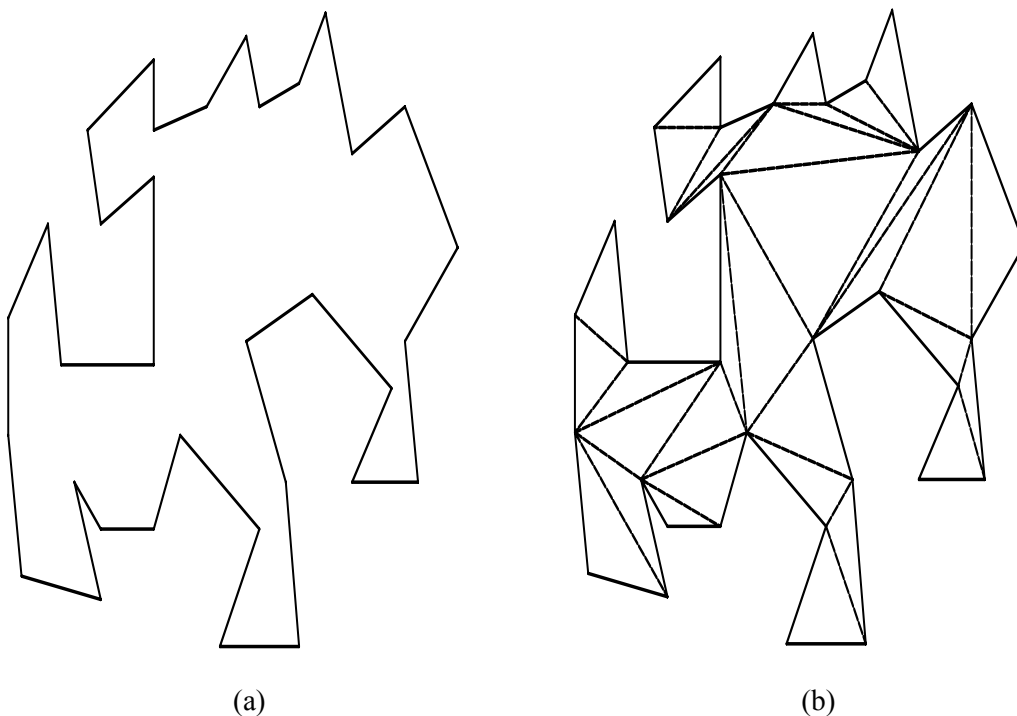


Figura 2: (a) Polígono simples arbitrário com 34 vértices (15 reflexos); (b) triangulação (32 triângulos) obtida após a aplicação do algoritmo Corta-Orelhas em relação ao polígono dado em (a). Observem que a relação combinatória de Euler pode ser verificada, onde $V = 34$, $F = 33$ e $E = 65$.

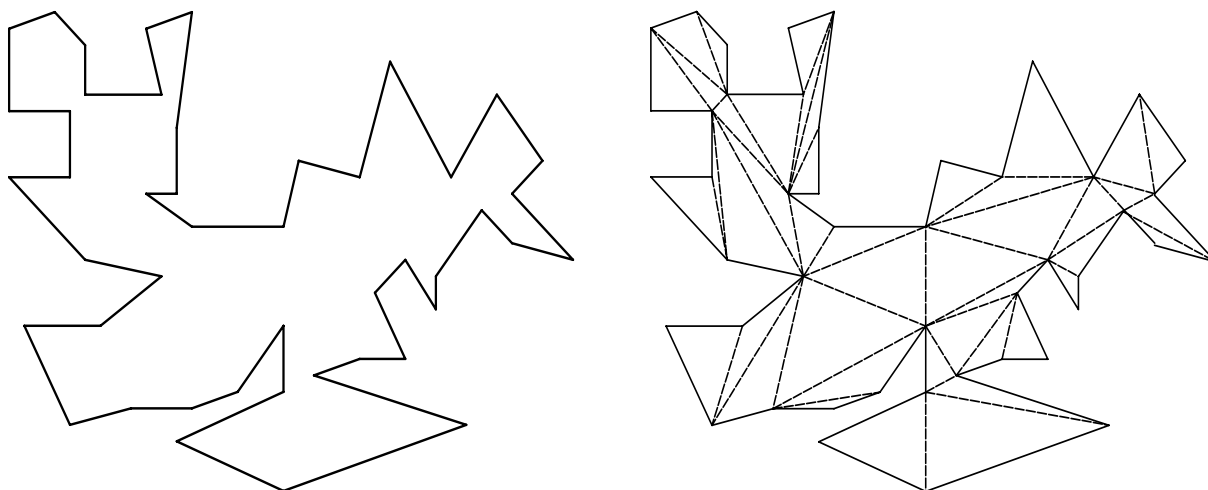


Figura 3: (a) Polígono simples arbitrário com 46 vértices (22 reflexos); (b) triangulação (44 triângulos) obtida após a aplicação do algoritmo Corta-Orelhas em relação ao polígono dado em (a). Observem que a relação combinatória de Euler pode ser verificada, onde $V = 46$, $F = 45$ e $E = 89$.

Referencias Bibliográficas

BERG, M.; KREVELD, M. V.; OVERMARS, M.; SCHWARZKOPF, O. **Computational geometry: algorithms and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 365p.

CHAZELLE, B. Triangulating a simple polygon in linear time. **Discrete and Computational Geometry**, New York, v. 6, n. 5, p. 485-524, 1991.

FOURNIER, A.; MONTUNO, D.Y. Triangulating simple polygons and equivalent problems. **ACM Transaction on Graphics**, New York, v. 3, n. 2, p. 153-174, abr.1984.

GAREY, M.R.; JOHNSON, D. S. J.; PREPARATA F. P.; TARJAN, R.E. Triangulating a simple polygon. **Information Processing Letters**, [S.l.], v. 7, p. 175-179, 1978.

LEE, D. T.; PREPARATA, F. P. Location of a point in a planar subdivision and its applications. **SIAM Journal on Computing**, v.6, n.3, p.594-606, set. 1977.

MEISTER, G. H. Polygons have ears. **American Mathematical Monthly**, Washington, v. 82, n.6, p. 648-651, jun.-jul. 1975.

O'ROURKE, J. **Computational geometry in C**. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 376p.

PREPARATA, F. P., SUPOWIT, K. J. Testing a simple polygon for monotonicity. **Information Processing Letters**, [S.l.], v. 12, n. 4, p. 161-164, ago. 1981.